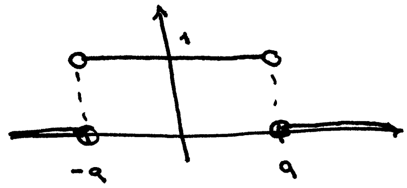
TD 6 - Corrigé

Ex. 1 1). $p_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in (-a, a) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$



$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} p_a(t)\, dt = \int_{-a}^{a} e^{-i\omega t} \cdot 1\, dt =$$

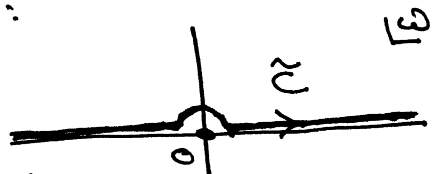
$$= \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \Big|_{-a}^{a} = \frac{e^{-i\omega a} - e^{i\omega a}}{-i\omega}$$

Transformée inverse:

$$TF^{-1}(\hat{f}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \hat{f}(\omega)\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(t+a)} - e^{i\omega(t-a)}}{\omega}\, d\omega =$$

La fonction $\frac{e^{i\omega(t+a)} - e^{i\omega(t-a)}}{\omega}$ est analytique dans le plan complexe de ω ($\omega = 0$ n'est pas un pôle, car le numérateur s'annule également). Donc, si on considère $\int_{-\infty}^{\infty}$ comme une intégrale de contour $\int_C$, où C coïncide avec $\mathbb{R}$, alors on peut déformer C de la façon suivante (sans changer la valeur de l'intégrale):



$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{C}} \frac{e^{i\omega(t+a)} - e^{i\omega(t-a)}}{\omega}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{C}} \frac{e^{i\omega(t+a)}}{\omega}\, d\omega - \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{C}} \frac{e^{i\omega(t-a)}}{\omega}\, d\omega$$

(on ne pouvait pas faire la même chose pour $\int_C$, car les intégrales qui en résultent divergent).

Considérons chacune des intégrales séparément:

1.1). $\displaystyle\int_{\tilde{C}} \frac{e^{i\omega(t+a)}}{\omega}\,d\omega \;=$

- si $t+a>0$, d'après le lemme de Jordan
  $\displaystyle\int \frac{e^{i\omega(t+a)}}{\omega}\,d\omega$ sur le demi-cercle de rayon R dans le demi-plan supérieure tend vers 0 lorsque $R\to\infty$.
- si $t+a<0 \Rightarrow$ de même, $\displaystyle\int \frac{e^{i\omega(t+a)}}{\omega}\,d\omega \to 0$
- donc

$$= \begin{cases} 2\pi i \displaystyle\sum_{\substack{\text{singularités}\\ \text{avec } \operatorname{Im} z>0}} \operatorname{res} \frac{e^{i\omega(t+a)}}{\omega} = 0 & \text{si } t+a>0 \\[2ex] -2\pi i \displaystyle\operatorname{res}_{\omega=0} \frac{e^{i\omega(t+a)}}{\omega} - \cancelto{0}{2\pi i \displaystyle\sum_{\substack{\text{singularités}\\ \text{avec } \operatorname{Im} z<0}} \operatorname{res} \frac{e^{i\omega(t+a)}}{\omega}} = -2\pi i & \text{si } t+a<0 \end{cases}$$

1.2). De la même manière

$$\int_{\tilde{C}} \frac{e^{i\omega(t-a)}}{\omega}\,d\omega = \begin{cases} 0 & \text{si } t-a>0 \\ -2\pi i & \text{si } t-a<0 \end{cases}$$

Par conséquent :

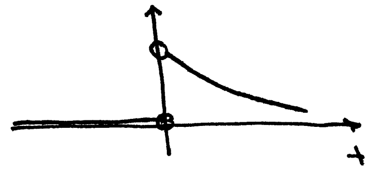
$$\int_{\tilde{C}} \frac{e^{i\omega(t+a)}}{\omega}\,d\omega - \int_{\tilde{C}} \frac{e^{i\omega(t-a)}}{\omega}\,d\omega =$$

$$= \begin{cases} 0-0=0 & \text{pour } t>a \\ 0-(-2\pi i)=2\pi i & \text{pour } t\in(-a,a) \\ (-2\pi i)-(-2\pi i)=0 & \text{pour } t<-a. \end{cases}$$

et finalement la TF inverse est

$$TF^{-1}(\hat{f}) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t>a \\ 1 & \text{pour } t\in(-a,a) \\ 0 & \text{pour } t<-a. \end{cases}$$

2). $f(t) = e^{-\alpha t}\,\Theta(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & \text{si } t>0 \\ 0 & \text{si } t<0 \end{cases}$



$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\,dt = \int_0^{\infty} e^{-i\omega t - \alpha t}\,dt =$$

$$= \left. \frac{e^{-(\alpha+i\omega)t}}{-(\alpha+i\omega)} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha+i\omega}$$

TF inverse:

$$TF^{-1}(\hat{f}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\hat{f}(\omega)\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\alpha+i\omega}\,d\omega$$

- si $t>0 \Rightarrow \int \frac{e^{i\omega t}}{\alpha+i\omega}\,d\omega = 0$
- si $t<0 \Rightarrow \int \frac{e^{i\omega t}}{\alpha+i\omega}\,d\omega = 0$
- donc pour $t>0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\alpha+i\omega}\,d\omega = 2\pi i \sum_{\substack{\text{singul.} \\ \text{avec } \mathrm{Im} z>0}} \mathrm{res}\, \frac{e^{i\omega t}}{\alpha+i\omega} = 2\pi i \operatorname*{res}_{\omega=i\alpha} \frac{e^{i\omega t}}{\alpha+i\omega}$$

$$= 2\pi i \frac{e^{i(i\alpha)t}}{i} = 2\pi e^{-\alpha t}$$

- de même, pour $t<0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\alpha+i\omega}\,d\omega = 2\pi i \sum_{\substack{\text{singularités} \\ \text{avec } \mathrm{Im} z<0}} \mathrm{res}\, \frac{e^{i\omega t}}{\alpha+i\omega} = 0.$$

- alors:

$$TF^{-1}(\hat{f}) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & \text{si } t>0, \\ 0 & \text{si } t<0. \end{cases}$$

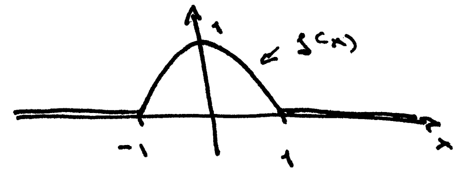
<u>Ex.2</u> 1). $\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t-a)\,dt =$

$$= \left| \begin{matrix} t-a = t' \\ dt = dt' \end{matrix} \right| = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t'+a)} f(t')\,dt' = e^{-i\omega a}\hat{f}(\omega)$$

2). $\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\, e^{i\omega_0 t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-\omega_0)t} f(t)\,dt =$

$$= \hat{f}(\omega-\omega_0).$$

Ex. 3 1). $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{pour } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$



$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} e^{-i\omega x} (1 - x^2)\, dx =$$

$$= \frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega} \Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} x^2\, d\left(\frac{e^{-i\omega x}}{i\omega}\right) =$$

$$= \frac{e^{-i\omega} - e^{i\omega}}{-i\omega} + x^2 \frac{e^{-i\omega x}}{i\omega} \Big|_{-1}^{1} - \frac{2}{i\omega} \int_{-1}^{1} e^{-i\omega x} x\, dx$$

$$= \cancel{\frac{e^{-i\omega} - e^{i\omega}}{-i\omega}} + \cancel{\frac{e^{-i\omega} - e^{i\omega}}{i\omega}} + \frac{2}{(i\omega)^2} \int_{-1}^{1} x\, d\left(e^{-i\omega x}\right) =$$

$$= -\frac{2}{\omega^2} x e^{-i\omega x} \Big|_{-1}^{1} + \frac{2}{\omega^2} \int_{-1}^{1} e^{-i\omega x}\, dx =$$

$$= -\frac{2}{\omega^2}\left(e^{-i\omega} + e^{i\omega}\right) + \frac{2}{\omega^2} \frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega} \Big|_{-1}^{1} =$$

$$= -\frac{2}{\omega^2} \cdot 2\cos\omega + \frac{2}{i\omega^3} \underbrace{\left(e^{i\omega} - e^{-i\omega}\right)}_{= 2i \sin\omega} =$$

$$= -\frac{4\cos\omega}{\omega^2} + \frac{4\sin\omega}{\omega^3} = -4\, \frac{\omega\cos\omega - \sin\omega}{\omega^3}.$$

2). La fonction $f(x)$ est continue et C^1 par morceaux, donc

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-4) \underbrace{\frac{\omega\cos\omega - \sin\omega}{\omega^3}}_{\text{fonction paire de } \omega} e^{i\omega x}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}(-4) \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{\omega\cos\omega - \sin\omega}{\omega^3} \cos\omega x}_{\text{fonction paire de } \omega}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}(-4) \cdot 2 \int_{0}^{\infty} \frac{\omega\cos\omega - \sin\omega}{\omega^3} \cos\omega x\, d\omega.$$

Nous avons donc :

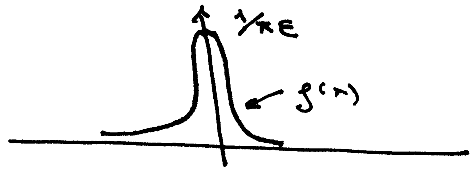
$$\int_0^\infty \frac{\omega\cos\omega - \sin\omega}{\omega^3} \cos\omega x \, d\omega = -\frac{\pi}{4} f(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^\infty \frac{t\cos t - \sin t}{t^3} \cos t/2 \, dt = -\frac{\pi}{4} f(1/2) = -\frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = -\frac{3\pi}{16}.$$

__Ex. 41__

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}$$



$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{x^2 + \varepsilon^2} dx$$

- si $\omega > 0 \Rightarrow \int \frac{e^{-i\omega x}}{x^2 + \varepsilon^2} dx = 0$

- si $\omega < 0 \Rightarrow \int \frac{e^{-i\omega x}}{x^2 + \varepsilon^2} dx = 0$.

- donc :

$$\omega > 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{x^2 + \varepsilon^2} dx = -2\pi i \operatorname*{res}_{x = -i\varepsilon} \frac{e^{-i\omega x}}{(x - i\varepsilon)(x + i\varepsilon)} =$$

$$= -2\pi i \frac{e^{-i\omega(-i\varepsilon)}}{-2i\varepsilon} = \frac{\pi}{\varepsilon} e^{-\omega\varepsilon}$$

$$\omega < 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{x^2 + \varepsilon^2} dx = 2\pi i \operatorname*{res}_{x = i\varepsilon} \frac{e^{-i\omega x}}{(x - i\varepsilon)(x + i\varepsilon)} =$$

$$= 2\pi i \frac{e^{-i\omega \cdot i\varepsilon}}{2i\varepsilon} = \frac{\pi}{\varepsilon} e^{+\omega\varepsilon}$$

Par conséquent :

$$\hat{f}(\omega) = \frac{\varepsilon}{\pi} \cdot \frac{\pi}{\varepsilon} e^{-|\omega|\varepsilon} = e^{-|\omega|\varepsilon}.$$

Nous avons $\forall \varepsilon > 0$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

Comme naïvement $\lim_{\varepsilon \to 0} e^{-|\omega|\varepsilon} = 1$ et $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d\omega = \delta(x)$ on obtient

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{\pi} \frac{1}{x^2 + \varepsilon^2} = \delta(x).$$